Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетни математически състезания

Варна, 29-31 март 2019 г.

Варна, 2019 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Дадено е уравнението $(p-6)x^2+2px-p=4$, където p е реален параметър.

а) За кои стойности на p уравнението е изпълнено само за едно реално x?

б) За кои стойности на p уравнението има два различни реални корена x_1 и x_2, за които

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\sqrt{\frac{27}{2}}$$

и всички участващи тук изрази са реални числа? Запишете всяка намерена стойност на p като несъкратима дроб.

Решение. а) При $p=6$ уравнението е линейно и има единствен корен. Нека $p\neq 6$. Сега е необходимо съкратената дискриминанта $D'=p^2+(p-6)(p+4)=0$, т.е. $2p^2-2p-24=0$, чиито корени са $p=4$ и $p=-3$.

б) Необходимо е дискриминантата да е положителна, което ще проверим по-късно за намерените стойности на p. Всичко написано по-нататък е валидно при предположението, че стойностите на p са подходящи да осигурят това. От формулите на Виет

$$x_1+x_2=\frac{2p}{6-p} \text{ и } x_1x_2=\frac{p+4}{6-p}.$$

Ако $p>6$, то $6-p<0$, $p+4>0$, така че x_1 и x_2 са с различни знаци и $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ не е реално число. Последното е в сила и при $p<-4$, понеже $6-p>0$ и $p+4<0$. От друга страна, ако $p\in(-4;6)$, то $6-p>0$, $p+4>0$ и (при направената в началото уговорка) участващите изрази са реални. Имаме

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\frac{|x_1|+|x_2|}{\sqrt{x_1x_2}}.$$

Ако $p\in(0;6)$, то $x_1+x_2>0$, така че $x_1>0$, $x_2>0$ и

$$\sqrt{\frac{27}{2}}=\frac{2p}{6-p}:\sqrt{\frac{p+4}{6-p}}=\frac{2p}{\sqrt{(p+4)(6-p)}}.$$

Ако $p\in(-4;0)$, то $x_1+x_2<0$, така че $x_1<0$, $x_2<0$ и

$$\sqrt{\frac{27}{2}}=\frac{-2p}{6-p}:\sqrt{\frac{p+4}{6-p}}=\frac{-2p}{\sqrt{(p+4)(6-p)}}.$$

И в двата случая получаваме

$$\frac{4p^2}{(p+4)(6-p)} = \frac{27}{2}$$

$$8p^2 = 27(p+4)(6-p)$$

$$35p^2 - 54p - 27.24 = 0.$$

Имаме $D = 54^2 + 4.35.27.24 = 18^2(3^2 + 35.8) = 18^2.17^2$, при което $p_{1,2} = \dfrac{54 \pm 306}{70}$ и $p_1 = \dfrac{36}{7}$ (тогава $x_1 > 0$, $x_2 > 0$); $p_2 = -\dfrac{18}{5}$ (тогава $x_1 < 0$, $x_2 < 0$).

Остава да се убедим наистина ли $D' > 0$ при намерените стойности на p. При $p = \dfrac{36}{7}$ имаме $D' = \dfrac{912}{49} > 0$. При $p = -\dfrac{18}{5}$ имаме $D' = \dfrac{228}{25} > 0$. (Не е задължително стойностите на D' да са изчислени, достатъчно е по някакъв начин да е гарантирано, че $D' > 0$.)

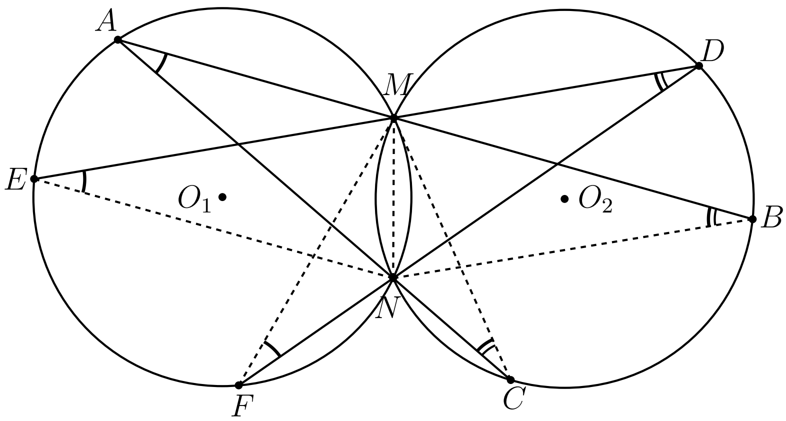
Оценяване (6 точки):

а) 2 т.: 1 т. за $p = 6$ и общо 1 т. за $p = 4$ и $p = -3$;

б) 4 т., от които 1 т. за намиране на условието $p \in (-4; 6)$; 1 т. за правилно изразяване на желаното условие чрез формулите на Виет в двата случая; 1 т. за намиране стойностите на p в несъкратим вид; 1 т. за осигуряване на $D' > 0$.

Задача 8.2. Окръжностите k_1 и k_2 се пресичат в точките M и N. През точка $A \in k_1$, външна за k_2, са построени правите AM и AN, които пресичат k_2 за втори път в точки B и C, така че M е между A и B, а N е между A и C. През точка D от дъгата BM на k_2, несъдържаща N, са построени правите DM и DN, които пресичат k_1 за втори път в точките E и F, така че M е между D и E, а N е между D и F. Ако $AB = ED$ и $AC = FD$, докажете, че MN е симетрала на отсечката AD.

Решение. Имаме $\sphericalangle MAN = \sphericalangle MEN = \sphericalangle MFN$ като вписани в k_1 и измерващи се с половинката от дъгата MN. Аналогично $\sphericalangle MBN = \sphericalangle MDN = \sphericalangle MCN$ и от $AB = ED$ и $AC = FD$ получаваме $\triangle ABN \cong \triangle EDN$ и $\triangle ACM \cong \triangle FDM$.



Следователно $AN = EN$ и $AM = MF$. От $AN = EN$ следва $\sphericalangle NAE = \sphericalangle NEA$. Имаме $\sphericalangle NAE = \sphericalangle EMN$ като вписани и измерващи се с половинката от дъгата EN и аналогично $\sphericalangle NEA = \sphericalangle NMB$, т.е. $\sphericalangle EMN = \sphericalangle NMB$. От $AM = FM$ следва $\sphericalangle MAF = \sphericalangle MFA$. Като вписани $\sphericalangle MFA = \sphericalangle MNA$ и $\sphericalangle MAF = \sphericalangle MND$, т.е. $\sphericalangle MNA = \sphericalangle MND$.

Сега по втори признак $\triangle ANM \cong \triangle DNM$, т.е. $AN = DN$ и $AM = DM$ и MN е симетрала на отсечката AD.

Забележка. Ако означим центровете на окръжностите с O_1 и O_2 съответно, то получаваме, че $\sphericalangle MO_1N = 2\sphericalangle MAN = 2\sphericalangle MDN = \sphericalangle MO_2N$, т.е. $\triangle MO_1N \cong \triangle MO_2N$ и следователно окръжностите k_1 и k_2 са с равни радиуси.

Оценяване (6 точки): 1 т. за $\triangle ABN \cong \triangle EDN$; 1 т. за $\sphericalangle EMN = \sphericalangle NMB$; 1 т. за $\triangle ACM \cong \triangle FDM$; 1 т. за $\sphericalangle MNA = \sphericalangle MND$; 2 т. за завършване.

Задача 8.3. Една или повече монети, поставени една върху друга, ще наричаме кула. Във всяко поле на дъска 5×7 отначало има кула от по една монета. На всеки ход някоя монета прескача кула, намираща се в съседно (по страна или диагонал) поле и застава на същото разстояние от другата ѝ страна (евентуално върху друга кула). След няколко хода на дъската имало k кули.

а) Намерете най-малката възможна стойност на k, ако е разрешено да се правят произволен брой ходове.

б) Намерете най-малкия брой ходове, с които може да се постигне намерената минимална стойност на k.

Решение. Да оцветим таблицата както следва:

1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1

При ходове монетите не променят цвета на полетата си, така че винаги ще има кула на поне по 1 поле от всеки цвят. Можем да постигнем $k = 4$ например като първо изпразним 20-те полета по външната рамка (като всяка монета прескача най-близката съседна от по-вътрешната рамка), после 9 от полетата на тази по-вътрешна рамка, оставяйки кули само в правоъгълник 2×3, и накрая изпразним и десните две полета в него, оставяйки кули само в квадрат 2×2.

Да преценим колко хода са нужни за събиране на монетите от цвят 1 в една кула. За да съберем монетите от най-лявото и най-дясното поле на даден ред са нужни общо поне 3 хода, а за останалите 6 полета от цвят 1 са нужни общо поне 5 хода, или общо поне $3.3 + 5 = 14$ хода.

За събиране на деветте монети от цвят 2 са нужни общо поне 8 хода.

Да преценим колко хода са нужни за събиране на монетите от цвят 3 в една кула. За да съберем монетите от най-лявото и най-дясното поле на даден ред са нужни общо поне 3 хода, а за останалите 4 полета от цвят 3 са нужни общо поне 3 хода, или общо поне $2.3 + 3 = 9$ хода.

За събиране на шестте монети от цвят 4 са нужни общо поне 5 хода.

И така, нужни са общо поне $14 + 8 + 9 + 5 = 36$ хода. Те може да са както описаните в началото. Наистина, там ходовете са 20 за полетата от външната рамка, плюс 9 за частта от втората рамка, плюс $1 + 6 = 7$ за последните две полета (в едно от тях при първата фаза се е струпала кула от 6 монети), или общо $20 + 9 + 1 + 6 = 36$ хода.

Оценяване (7 точки):

а) 3 т., от които 2 т. за оцветяването и 1 т. за завършване;

б) 4 т., от които по 0,5 т. за оценка на ходовете от всеки цвят и 2 т. за подходящ пример.

Задача 8.4. Да се реши в прости числа уравнението $p^2 - q^4 - r^4 - s^4 = 374$.

Решение. Нека първо считаме, че $q \geq r \geq s$. Явно $p > 2$, т.е. е нечетно. Тогава сред q, r, s трябва да има едно или три нечетни. Ако има едно, то лявата страна се дели на 4, а дясната – не: абсурд. Следователно всички числа са по-големи от 2. Да допуснем, че $s > 3$. Тогава лявата страна дава остатък 1 при деление на 3, а дясната – остатък 2: абсурд. И така, $s = 3$. Уравнението добива вида

$$p^2 - q^4 - r^4 = 455.$$

Да допуснем, че $r > 5$. Тогава дясната страна се дели на 5, а лявата – не: абсурд. И така, $r = 5$. Уравнението добива вида $p^2 - q^4 = 1080$. Да допуснем, че $q = 5$. Тогава $p > 5$ и дясната страна се дели на 5, а лявата – не: абсурд. И така, $q > 5$. Понеже $p > q^2$, то $p \geq q^2 + 2$ и $1080 = p^2 - q^4 \geq (q^2+2)^2 - q^4 = 4q^2 + 4$. Оттук $q^2 \leq 1076 : 4 = 269$, т.е. $q < 17$. Остава да проверим $q = 7, 11, 13$.

При $q = 7$ имаме $p^2 = 1080 + 7^4 = 3481$, откъдето $p = 59$.

При $q = 11$ имаме $p^2 = 1080 + 11^4$, което дава остатък 6 при деление на 7, така че не е точен квадрат. Алтернативно, директно се проверява, че 15721 не е точен квадрат.

При $q = 13$ имаме $p^2 = 1080 + 13^4$, което дава остатък 3 при деление на 7, така че не е точен квадрат. Алтернативно, директно се проверява, че 29641 не е точен квадрат.

Окончателно задачата има 6 решения: $p = 59$, $\{q; r; s\} = \{3; 5; 7\}$ ($3! = 6$ възможни пермутации).

Оценяване (7 точки): 1 т. за доказване, че числата са нечетни; 1 т. за доказване, че едно от тях е равно на 3; 1 т. за доказване, че едно от тях е равно на 5; 1 т. за намиране на шестте решения на задачата; 3 т. за отхвърляне на останалите случаи (разпределени пропорционално на това каква част от проверките в рамките на намереното ограничение са направени успешно; ако няма ограничаващо големината условие, частичните проверки не носят точки).

Задача 9.1. Дадена е системата

$$\left| \begin{array}{l} x - y = 1 - a \\ xy = a^2 - a - 3 \end{array} \right. ,$$

където a, x, y са реални числа. Да се намери най-малката стойност на израза $x^2 + y^2$ и стойностите на a, за които тя се достига.

Решение. Тъй като $x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$, директно се получава, че $x^2 + y^2 = 3a^2 - 4a - 5$, което е квадратна функция спрямо параметъра a. Отделяйки точен квадрат, получаваме $f(a) := 3a^2 - 4a - 5 = 3(a - \frac{2}{3})^2 - \frac{19}{3}$ и знача изразът е симетричен спрямо $a = \frac{2}{3}$, където се достига глобалният минимум на функцията.

От друга страна, трябва да определим допустимото множество от стойности за a, при които системата има реални решения (x, y) и да намерим локалния минимум на $f(a)$ в това множество. От първото уравнение изразяваме, че

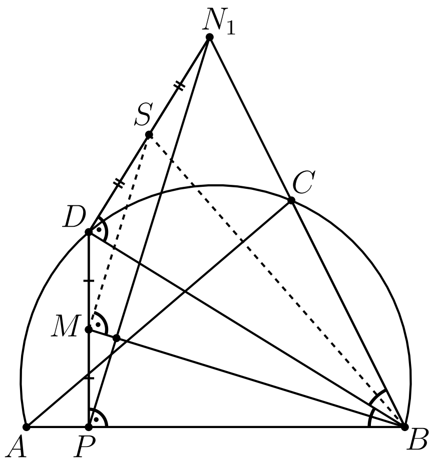
$x = 1 - a + y$ и, замествайки във второто и извършвайки необходимите преобразувания, получаваме, че квадратното уравнение $y^2 + (1-a)y - (a^2 - a - 3) = 0$ трябва да има реален корен, което е еквивалентно на $D = 5a^2 - 6a - 11 = (5a-11)(a+1) \geq 0$, т.е., $a \in (-\infty, -1] \cup [\frac{11}{5}, +\infty)$.

Допустимото множество за a е симетрично относно $\frac{3}{5}$ и тъй като $\frac{2}{3} \notin (-\infty, -1] \cup [\frac{11}{5}, +\infty)$, $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$, то минимумът на $f(a)$ в това множество се достига при $a = \frac{11}{5}$ и е равен на $f(\frac{11}{5}) = \frac{18}{25}$. В този случай $x = -\frac{3}{5}$, $y = \frac{3}{5}$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за изразяването на $x^2 + y^2$ като функция на a; 1 т. за намиране върха на параболата (глобалния минимум) на $f(a)$; 1 т. за изразяването на едната променлива спрямо другата в първото уравнение и достигането до квадратно параметрично уравнение с реални корени; 1 т. за пресмятането на дискриминантата му и определянето на допустимото множество от стойности за a; 2 т. за довършване.

Задача 9.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ и нека точка D е средата на дъгата AC от описаната около $\triangle ABC$ окръжност, несъдържаща точка B. Нека точка P е проекцията на D върху правата AB, а точка M е средата на DP. Правата през P, перпендикулярна на BM, пресича правата BC в точка N. Да се докаже, че $\sphericalangle NDB = 90^\circ$.

Решение. Нека правата през D, перпендикулярна на BD пресича правата BC в точка N_1. Ще докажем, че $PN_1 \perp BM$ откъдето ще следва, че $N \equiv N_1$. Да означим с S средата на отсечката DN_1. От $\sphericalangle DBP = \sphericalangle N_1BD$ и $\sphericalangle DPB = \sphericalangle N_1DB = 90^\circ$ следва, че $\triangle BDP \sim \triangle BN_1D$. Тогава $\sphericalangle BMP = \sphericalangle BSD$, т.е. $SDMB$ е вписан четириъгълник и $\sphericalangle BMS = \sphericalangle BDS = 90^\circ$. Остава да съобразим, че MS е средна отсечка в $\triangle PN_1D$, т.е. $MS \parallel PN_1$ и следователно $PN_1 \perp BM$.



Оценяване. (6 точки) 1 т. за дефинирането на т. N_1; 1 т. за дефинирането на т. S; 2 т. за $SDMB$ – вписан четириъгълник; 2 т. за довършване на решението.

Задача 9.3. Нека n е естествено число и $d_1 < d_2 < \ldots < d_m$ са всички естествени делители на $n! + 1$. Да се намерят всички n, за които

$$\frac{1}{d_1 + \sqrt{n! + 1}} + \frac{1}{d_2 + \sqrt{n! + 1}} + \cdots + \frac{1}{d_m + \sqrt{n! + 1}} = \frac{3}{142}.$$

Решение. Да означим за краткост $\sqrt{n! + 1} = x$. Имаме последователно

$$\frac{1}{d_i + x} + \frac{1}{d_{m+1-i} + x} = \frac{d_i + d_{m+1-i} + 2x}{(d_i + x)(d_{m+1-i} + x)} = \frac{d_i + d_{m+1-i} + 2x}{x(d_i + d_{m+1-i} + 2x)} = \frac{1}{x}$$

(това е вярно и при $i = m + 1 - i$; използвахме, че $d_i d_{m+1-i} = n! + 1 = x^2$). Лесно се вижда, че разглежданата сума е равна на $m/2x$ и даденото уравнение е еквивалентно на $71m = 3x$. В частност, x е цяло число, т.е. $n!+1$ е точен квадрат. Директна проверка за $n \leq 7$ дава решението $n = 7$. Тогава $n! + 1 = 5041 = 71^2$ и $m = 3$. За $n < 7$, $n! + 1 < 5041$, така че x не е цяло или не се дели на 71.

Оттук нататък ще считаме, че $n \geq 8$, като отбелязваме, че от равенството $n! + 1 = x^2$ следва, че x няма прости делители, ненадминаващи n.

Нека $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ е каноничното разлагане на x. Тогава

$$(*) \qquad 71(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \cdots (2\alpha_s + 1) = 3p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}.$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че $p_1 = 71$. Тъй като $3.71^{\alpha_1} > 71(2\alpha_1 + 1)$ при $\alpha_1 > 1$ и $p_i^{\alpha_i} > 2\alpha_i + 1$, $i \geq 2$, поради $p_i > 7$, дясната страна на $(*)$ е по-голяма от лявата освен ако $s = 1$ и $\alpha_1 = 1$, което води до $n = 7$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. – за достигане до уравнението $71m = 3x$; 1 т. – за решение $n = 7$ и липса на решения $n < 7$; 2 т. – за достигане до (*); 2 т. – за довършване, че няма решения $n > 7$.

Задача 9.4. В държавата Кръгландия всичките 2019 града са разположени последователно през 1 км. върху единствения междуградски път в държавата, който има формата на окръжност и е с дължина 2019 км. Множество от 673 града ще наричаме *добро*, ако разстоянието между никои два от градовете не е нито 3 км. нито 673 км. (разстояние между два града се равнява на дължината на по-късата дъга, която отсичат от междуградския път). Да се намери броят на добрите множества от градове в Кръгландия.

Решение. Нека номерираме градовете по часовниковата стрелка с $A_1, A_2, \ldots, A_{2019}$ и да ги разположим циклично в таблица 3×673, както е показано по-долу:

A_1	A_4	A_7	$\cdots$	$\cdots$	A_{2017}
A_{674}	A_{677}	A_{680}	$\cdots$	$\cdots$	A_{671}
A_{1347}	A_{1350}	A_{1353}	$\cdots$	$\cdots$	A_{1344}

Тъй като $3|2019$, $673|2019$ и $(3, 673) = 1$, лесно се вижда, че всеки 2 града на разстояние 3 един от друг се намират в един и същи ред, а всеки 2 града на разстояние 673 един от друг се намират в един и същи стълб на табличката. Да я оцветим по редове в бяло, зелено, червено. Едно множество от градове е добро, тогава и само тогава, когато сме избрали по един град от всеки стълб на таблицата, като градовете от всеки 2 съседни стълба са разноцветни (последният 673-ти стълб е съседен и на първия).

Да означим броя на различните такива конструкции с a_{673}. Ще докажем по индукция, че $a_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n$ за всяко $n \geq 3$. При $n = 3$ трябва да изберем един бял, един зелен и един червен град от различни стълбове, следователно $a_3 = 3! = 6 = 2^3 - 2$. Нека сега сме доказали формулата за n и да разгледаме $n + 1$. Ако не се грижим, че $n + 1$-вия стълб е съседен на първия, то можем да изберем $3 \cdot 2^n$ "добри" конструкции (фиксираме цвят в първата колона и после от всяка следваща избираме град в различен от предходната цвят). Когато цвета на градовете в първата и последната колона са еднакви, то ако "слеем" двете колони, получаваме "добра" конструкция за n колони, т.е., броят на тези конфигурации е a_n. Окончателно,

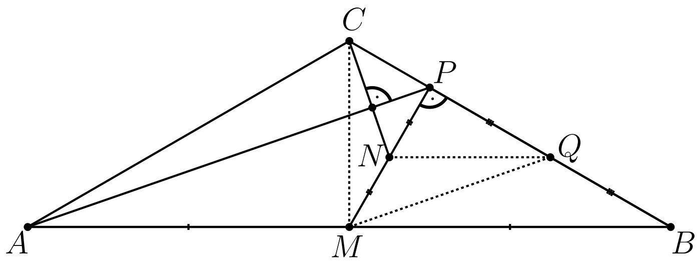
$$a_{n+1} = 3 \cdot 2^n - a_n = 3 \cdot 2^n - 2^n - 2 \cdot (-1)^n = 2^{n+1} + 2 \cdot (-1)^{n+1}.$$

С това индукцията е завършена и значи броят на добрите множества от градове в Кръгландия е $2^{673} - 2 = 2\left(2^{672} - 1\right)$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за конструирането и оцветяването на табличката 3×673, както и преформулирането на условието за "добро" множество; 3 т. за доказване на общата формула $a_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n$; 1 т. за отговора.

Задача 10.1. Даден е $\triangle ABC$ и нека M е средата на страната AB. Означаваме с P проекцията на M върху страната BC ($P \in BC$), а с N средата на MP. Да се намерят ъглите на $\triangle ABC$, ако е известно, че $AP \perp CN$ и $AP : CN = 2\sqrt{3}$.

Решение. Нека означим с Q средата на отсечката BP.



Тогава MQ е средна отсечка в $\triangle ABP$, т.е. $MQ \parallel AP$, $MQ = \dfrac{1}{2}AP$ и от условието следва, че $MQ \perp CN$ и $MQ : CN = \sqrt{3}$. Следователно N се явява ортоцентър в $\triangle MQC$ и $NQ \perp CM$, но NQ е средна отсечка в $\triangle MBP$, т.е. $AB \parallel NQ \perp CM$ и така достигаме до извода, че $\triangle ABC$ е равнобедрен. Остава да съобразим, че $\triangle MQP \sim CNP$, т.е. $MP : CP = MQ : CN = \sqrt{3}$, т.е. $\sphericalangle MCP = 60^\circ$ и окончателно $\sphericalangle ACB = 120^\circ$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 30^\circ$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за построяване на точката Q и отчитане на факта, че $MQ \perp CN$ и $MQ : CN = \sqrt{3}$; 2 т. за $\triangle ABC$ - равнобедрен; 2 т. за довършване на решението.

Задача 10.2. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$a - 4^x = \sqrt{a + 2^x}$$

има решение.

Решение. Полагаме $2^x = t$, $t > 0$ и достигаме до ирационалното уравнение

$$a - t^2 = \sqrt{a + t}.$$

Преобразуваме го във вида

$$a + t - \sqrt{a + t} = t + t^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a + t} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2$$

и следователно $\sqrt{a + t} = -t$ или $\sqrt{a + t} = t + 1$. Но $t > 0$ и задачата се свежда до намиране стойностите на параметъра a, за които уравнението $\sqrt{a + t} = t + 1$ има положително решение. Последното е еквивалентно на

$$f(t) = t^2 + t + 1 - a = 0$$

за поне една положителна стойност на t. Тъй като върхът на параболата е при $t = -\frac{1}{2} < 0$, горното е изпълнено точно когато $f(0) = 1 - a < 0$. Окончателно $a \in (1, +\infty)$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за полагането $2^x = t$, $t > 0$ и свеждане до уравнението $a - t^2 = \sqrt{a+t}$; 3 т. за свеждане до уравнението $\sqrt{a+t} = t + 1$, $t > 0$; 2 т. за довършване на решението.

Задача 10.3. Виж задача 9.3.

Задача 10.4. Едно множество A от естествени числа се нарича *свободно*, ако за всеки две числа $a \in A$ и $b \in A$ (не непременно различни) числото ab не е от A. Да се намери най-малкото естествено число n, за което множеството $M = \{3, 4, 5, \ldots, 3^{14} - 1\}$ може да се представи като обединение на n две по две непресичащи се *свободни* множества.

Решение. Лесно се вижда, че множеството $\{3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5\}$ не може да се представи като обединение на две непресичащи се *свободни* множества и следователно $n \geq 3$. Ще докажем, че $n = 3$. Едно число $x \in M$ ще наричаме *просто*, ако то не може да се представи като произведение на две или повече числа от M. Лесно се вижда, че това са числата $4, 8, p$ и $2p$, където p е просто число в обичайния смисъл. За число $x \in M$ да означим с $f(x)$ най-голямото естествено число, за което x може да се представи като произведение на $f(x)$ *прости* числа от M. Вижда се, че $f(xy) \leq f(x) + f(y) + 1$. Полагаме:

$$A = \{x \in M | f(x) = 1, 4, 10, 13\};$$

$$B = \{x \in M | f(x) = 2, 3, 11, 12\};$$

$$C = \{x \in M | f(x) = 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Понеже $f(x) \leq 13$ за $x \in M$ лесно се вижда, че множествата A, B и C дават исканото разбиване.

Оценяване: 1 т. за разглеждане на *прости* числа в M; 1 т. за въвеждане на функцията $f(x)$; 2 т. за $f(xy) \leq f(x) + f(y) + 1$; 3 т. за вярно разбиване.

Задача 11.1. Да се реши системата:

$$\left| \begin{array}{l} \lg^2\left(\frac{x^2+x}{y}\right) = \lg^2\left(\frac{y^2+y}{x}\right) + \lg^2(x+1)(y+1) \\ \lg(x+6) = \lg(x-y) + \lg(y+1). \end{array} \right.$$

Решение. Тъй като

$$\lg^2\left(\frac{x^2+x}{y}\right)-\lg^2\left(\frac{y^2+y}{x}\right)=\lg(x+1)(y+1)\lg\left(\frac{x^2(x+1)}{y^2(y+1)}\right),$$

то първото уравнение е еквивалентно на:

$$(*)\qquad \lg(x+1)(y+1)\left(\lg\left(\frac{x^2(x+1)}{y^2(y+1)}\right)-\lg(x+1)(y+1)\right)=0.$$

Ако $\lg(x+1)(y+1)=0$, то $(x+1)(y+1)=1$ и едното от x и y е положително, а другото е отрицателно. Поради $\frac{x^2+x}{y}>0$ и $\frac{y^2+y}{x}>0$ това е невъзможно.

При $\lg\left(\frac{x^2(x+1)}{y^2(y+1)}\right)=\lg(x+1)(y+1)$, получаваме $x^2=y^2(y+1)^2$ и понеже $\frac{y(y+1)}{x}>0$, то $x=y(y+1)$.

От второто уравнение намираме $(x-y)(y+1)=x+6$ и след заместване $x=y(y+1)$, получаваме $y^3-y-6=0$. Сега от $y^3-y-6=(y-2)(y^2+2y+3)$ следва, че $y=2$ и следователно $x=6$.

Оценяване: 2 т. за получаване на (*); 1 т. за случая $\lg(x+1)(y+1)=0$; 1 т. за $x=y(y+1)$; 2 т. за решаване на системата и получаване на отговора.

Задача 11.2. Нека a е реален параметър. Какъв е минималният брой цели решения на неравенството:

$$\frac{2x^2+(3a^2+1)x-2a^2+4a-6}{x^2+(a^2+a-3)x-a^2+2a-3}<1?$$

Решение. Неравенството е еквивалентно на:

$$\frac{x^2+(2a^2-a+4)x-a^2+2a-3}{x^2+(a^2+a-3)x-a^2+2a-3}<0$$

Нека

$$f(x)=x^2+(2a^2-a+4)x-a^2+2a-3 \text{ и } g(x)=x^2+(a^2+a-3)x-a^2+2a-3.$$

Понеже $f(0)=g(0)=-a^2+2a-3<0$, то уравненията $f(x)=0$ и $g(x)=0$ имат реални корени $x_1<0<x_2$ и $x_1'<0<x_2'$. Сега от

$$x_1x_2=x_1'x_2' \text{ и } x_1'+x_2'-(x_1+x_2)=a^2-2a+7>0$$

лесно се вижда, че наредбата на корените е $x_1 < x_1^{'} < 0 < x_2 < x_2^{'}$ и тогава решенията на неравенството са

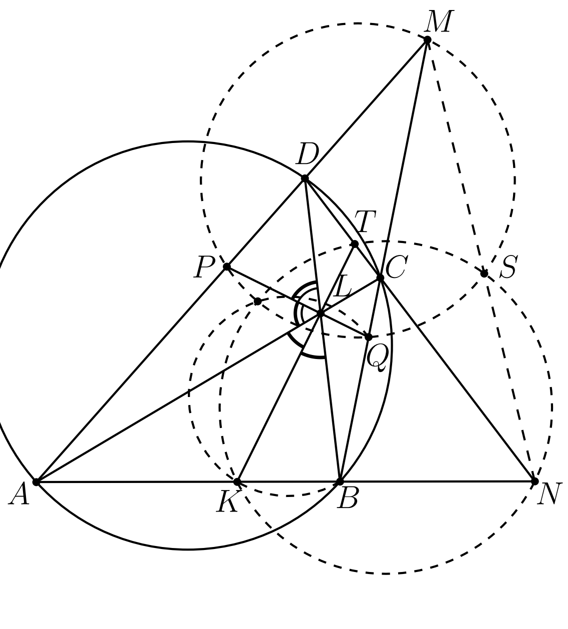
$$x \in (x_1, x_1^{'}) \cup (x_2, x_2^{'}).$$

Сборът от дължините на двата интервала е $a^2 - 2a + 7 = (a-1)^2 + 6 \geq 6$. При $a = 1$ целите решения са $-5, -4, -3, -2$ и 1, а при $a \neq 1$ сборът от дължините на двата интервала е по-голям от 6 и лесно се вижда, че те съдържат поне 5 цели числа.

Оценяване: 1 т. за доказателство, че всяко от уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ има един положителен и един отрицателенк корен; 2 т. за разположението на корените $x_1 < x_1^{'} < 0 < x_2 < x_2^{'}$; 1 т. за определяне на решението $x \in (x_1, x_1^{'}) \cup (x_2, x_2^{'})$ на неравенството; 1 т. за намиране на $a^2 - 2a + 7 = (a-1)^2 + 6 \geq 6$; 1 т. за получаване на отговора.

Задача 11.3. Диагоналите AC и BD на вписан четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка L. Правите AD и BC се пресичат в точка M, а правите AB и CD се пресичат в точка N. Ъглополовящата на ъгъл ALD пресича страните AD и BC съответно в точки P и Q, а ъглополовящата на ъгъл ALB пресича страните AB и CD съответно в точки K и T. Да се докаже, че описаните окръжности около $\triangle MPQ$, $\triangle NKT$ и $\triangle BKQ$ имат обща точка.

Решение. Нека S е точката на Микел за четириъгълника $ABCD$. От това, че $ABCD$ е вписан следва, че S лежи на MN.



Сега $\triangle SAD \sim \triangle SBC$ и от $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{BQ}{QC}$ (доказва се от свойството на ъглополовящите) следва:

$$\sphericalangle SPQ = \sphericalangle SAB = \sphericalangle MAB = \sphericalangle MPQ.$$

Това означава, че описаната около $\triangle MPQ$ окръжност минава през S. Аналогично се доказва, че и описаната окръжност около $\triangle NTK$ минава през S. Сега твърдението следва от $\triangle NBM$ и точките S, K и Q върху страните му.

Оценяване: 1 т. за разглеждане на точката на Микел за $ABCD$; 1 т. за равенството $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{BQ}{QC}$; 1 т. за подобието $\triangle SAD \sim \triangle SBC$; 2 т. за това, че S лежи на описаната окръжност около $\triangle MPQ$; 2 т. за довършване на решението.

Задача 11.4. Виж задача 10.4.

Задача 12.1. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който $AC = BC$, $BD = 2AD$ и $AB = AE$, където $E = AB \cap CD$. Да се намери отношението $\dfrac{AB.CD}{AD.BC}$.

Решение. Имаме

$$\frac{\sin \sphericalangle BED}{\sin \sphericalangle BDE} = \frac{BD}{BE} = \frac{2AD}{2AE} = \frac{\sin \sphericalangle AED}{\sin \sphericalangle ADE},$$

откъдето (1) $\sphericalangle ADE = \pi - \sphericalangle BDE = \sphericalangle BDC$.

Ако D е вътрешна/външна точка за описаната около $\triangle ABC$ окръжност k, то

$$\sphericalangle ADE < \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC < \sphericalangle BDC / \sphericalangle ADE > \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC > \sphericalangle BDC.$$

Значи (2) $D \in k$ и от теоремата на Птолемей следва, че

$$(3) \quad AB.CD = AC.BD - AD.BC = BC.2AD - AD.BC = AD.BC.$$

Оценяване. (6 точки) 2 т. за (1), 3 т. за (2) и 1 т. за (3).

Забележка. Всеки три от следните пет условия влекат останалите две: $AC = BC$, $BD = 2AD$, $AB = AE$, $D \in k$ и $AB.CD = AD.BC$. Четириъгълник, изпълняващ последните две условия, се нарича хармоничен.

Второ решение. *(Стефан Герджиков)* Нека $BE = 2.AB = 2a$, $BC = AC = b$, $CD = d$ и $2.AD = BD = 2c$, $DE = x$. От Теоремата на Стюарт за $\triangle BCE$ и отсечката BD и за $\triangle EAC$ и отсечката AD имаме

$$(x+d)(2c)^2 = d(2a)^2 + xb^2 - xd(x+d)$$

$$(x+d)c^2 = da^2 + xb^2 - xd(x+d).$$

Изваждаме от първото уравнение второто и също четири пъти второто. Получаваме

$$3(x+d)c^2 = 3da^2 \iff (x+d)c^2 = da^2$$
$$3xb^2 - 3xd(x+d) = 0 \iff b^2 = d(x+d),$$

защото $x \neq 0$. Умножаваме десните две равенства:

$$(x+d)c^2b^2 = d^2a^2(x+d) \iff c^2b^2 = d^2a^2.$$

Тъй като $a, b, c, d > 0$, получаваме $\dfrac{ad}{bc} = 1$.

Задача 12.2. Да се намерят всички естествени числа n и всички реални числа α за които следният израз не зависи от x :

$$\sin^n(x-\alpha).\sin^n x + \sin^n x.\sin^n(x+\alpha) + \sin^n(x+\alpha).\sin^n(x-\alpha).$$

Решение. Да означим дадения израз с $f_n(x,\alpha)$. Нека първо n е нечетно число. Понеже $f_n(x,\alpha) = f_n(x,-\alpha) = f_n(x,\alpha+2\pi)$, можем да считаме, че $\alpha \in [0,\pi]$. Имаме,че

$$-\sin^{2n}\alpha = f_n(0,\alpha) = f_n(\alpha,\alpha) = \sin^n\alpha.\sin^n 2a = \sin^{2n}\alpha.(2\cos\alpha)^n,$$

откъдето $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ или $\alpha = 2\pi/3$. Изразите $f_n(x,0) = 3\sin^{2n}x$ и $f_n(x,\pi) = -\sin^{2n}x$ не са константи. По-нататък,

$$-\left(\frac{3}{4}\right)^n = f_n(0,2\pi/3) = f_n(\pi/2,2\pi/3) = -\frac{2}{2^n} + \frac{1}{4^n},$$

т.е. $a_n := (3/2)^n + (1/2)^n = 2$ и значи $n = 1$ ($a_n > 2$ при $n > 1$). Обратно,

$$(1) \quad f_1(x,2\pi/3) = 2\sin^2 x\cos(2\pi/3) + \frac{\cos(2\pi/3) - \cos 2x}{2}$$

$$= -\sin^2 x - \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Нека сега n е четно число. Понеже $f_n(x,\alpha) = f_n(x,-\alpha) = f_n(x,\alpha+\pi)$, можем да считаме, че $\alpha \in [0,\pi/2]$. Както по-горе, от $f_n(0,\alpha) = f_n(\alpha,\alpha)$ следва, че $\alpha = 0$, или $\alpha = \pi/3$. Изразът $f_n(x,0) = 3\sin^{2n} x$ не е константа. По-нататък,

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n = f_n(0,\pi/3) = f_n(\pi/2,\pi/3) = \frac{2}{2^n} + \frac{1}{4^n},$$

т.е. $b_n := (3/2)^n - (1/2)^n = 2$ и значи $n = 2$ ($b_n > 2$ при $n > 2$). Обратно,

$$(2)\ 4f_2(x,\pi/3) = (1-\cos(2x-2\pi/3))(1-\cos 2x) + (1-\cos 2x)(1-\cos(2x+2\pi/3))$$
$$+(1-\cos(2x+2\pi/3))(1-\cos(2x-2\pi/3))$$
$$= 3 - 2(\cos(2x-2\pi/3) + \cos 2x + \cos(2x-2\pi/3))$$
$$+\cos(2x-2\pi/3).\cos 2x + \cos 2x.\cos(2x+2\pi/3) + \cos(2x+2\pi/3).\cos(2x+2\pi/3)$$
$$= 3 - 2(2\cos x.\cos 2\pi/3 + 2\cos x) + 2\cos^2 x\cos 2\pi/3 + \frac{\cos 4x + \cos 4\pi/3}{2}$$
$$= 3 - \cos^2 x + \frac{\cos 4x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

И така, отговорът на задачата е $n = 1$, $\alpha = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ и $n = 2$, $\alpha = \pm\pi/3 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Оценяване. (6 точки) По 1,5 т. за намиране на n и α при нечетно/четно n, 1 т. за (1) и 2 т. за (2).

Второ решение. *(Стефан Герджиков)* Нека $f(x)$ е дадената функция с параметри α и n; $f(x)$ е константа точно когато $f'(x) = 0$. Непосредствено пресмятаме, че за фиксирано $n \in \mathbb{N}$ и $\beta,\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(\sin^n(x-\beta)\sin^n(x-\gamma))' &= n\sin^{n-1}(x-\beta)\sin^{n-1}(x-\gamma)\cdot\\ &\quad(\cos(x-\beta)\sin(x-\gamma) + \sin(x-\beta)\cos(x-\gamma))\\ &= n\sin^{n-1}(x-\beta)\sin^{n-1}(x-\gamma)\sin(2x-\beta-\gamma).\end{aligned}$$

Следователно:

$$\begin{aligned}f'(x) \quad = n \quad &((\sin x\sin(x-\alpha))^{n-1}\sin(2x-\alpha) +\\ &(\sin x\sin(x+\alpha))^{n-1}\sin(2x+\alpha) +\\ &(\sin(x-\alpha)\sin(x+\alpha))^{n-1}\sin 2x).\end{aligned}$$

Първо да разгледаме случая $n > 1$. Тогава:

$$f'(x) = ng(x)\sin x,$$

където:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin^{n-2} x \sin^{n-1}(x-\alpha)\sin(2x-\alpha) + \\ & \quad \sin^{n-2} x \sin^{n-1}(x+\alpha)\sin(2x+\alpha) + \\ & \quad 2(\sin(x-\alpha)\sin(x+\alpha))^{n-1}\cos x. \end{aligned}$$

Тъй като $f'(x) = 0$ за всяко x, то $g(x) = 0$ за $x \notin \{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ и от това, че $g(x)$ е непрекъсната получаваме, че $g(x) = 0$. Сега при $n > 2$ от $g(0) = 0$ заключаваме, че $\sin(-\alpha)\sin\alpha = 0$, откъдето $\alpha = k\pi$. При тези стойности на α обаче $\sin(x-\alpha) = \sin(x+\alpha) = (-1)^k \sin x$. Оттук с директно заместване в дефиницията на $f(x)$ получаваме

$$f(x) = (-1)^{kn}\sin^{2n} x + (-1)^{kn}\sin^{2n} x + \sin^{2n} x = (2(-1)^{kn}+1)\sin^{2n} x,$$

което не е константа ($f(0) = 0 \neq 1 = |f(\pi/2)|$).

Нека сега $n = 2$. Сега тъй като $g(\alpha) = 0$ то $\sin 2\alpha \sin 3\alpha = 0$, откъдето $\sin 2\alpha = 0$ или $\sin 3\alpha = 0$. Но ако $\sin 2\alpha = 0$, то от $g(\alpha/2) = 0$ получаваме

$$\sin\frac{3}{2}\alpha\sin 2\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\alpha/2 = 0.$$

Първото събираемо е 0, а второто е равно на $-\frac{1}{2}\sin\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}$. Тъй като $\sin\alpha \neq 0$, то получаваме, че $\sin\frac{3\alpha}{2} = 0$ и следователно при всяко положение $\sin 3\alpha = 0$. Поради $\sin\alpha \neq 0$ имаме, че $\alpha = k\pi \pm \pi/3$, тоест $\sin^2\alpha = \frac{3}{4}$ и $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$. Замествайки в $f(x)$ при $n = 2$ и $\sin^2\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$ получаваме:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x(\sin^2(x-\alpha) + \sin^2(x+\alpha)) + \sin^2(x-\alpha)\sin^2(x+\alpha) \\ &= \sin^2 x(2\sin^2 x\cos^2\alpha + 2\cos^2 x\sin^2\alpha) + (\sin^2 x - \sin^2\alpha)^2 \\ &= \frac{1}{2}\sin^4 x + \frac{3}{2}\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x - 2\sin^2 x\sin^2\alpha + \sin^4\alpha \\ &= \frac{3}{2}\sin^2 x - 2\frac{3}{4}\sin^2 x + \sin^4\alpha \\ &= \sin^4\alpha = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

Следователно при $n = 2$ решенията са $\alpha = k\pi \pm \pi/3$.

Накрая при $n = 1$ $f'(x) = \sin(2x - \alpha) + \sin(2x + \alpha) + \sin 2x$, откъдето пресмятаме, че:

$$0 = f'(x) = 2 \sin 2x \cos \alpha + \sin 2x \text{ за всяко } x \in \mathbb{R}.$$

Следователно $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$. Следователно $\alpha = 2k\pi \pm \frac{2}{3}\pi$.

Задача 12.3. За дадено нечетно число $n \geq 3$ да се намери най-малкото реално число m_n със следното свойство: всеки n положителни реални числа със сума 1 могат да се разположат по окръжност така, че произведението на всеки две съседни числа да не надминава m_n.

Решение. Ще докажем, че ако $n = 2k + 1$, то

$$m_n = M_n := \max\left\{\frac{1}{(k+1)^2}, \frac{1}{4(2k-1)}\right\},$$

т.е. $m_n = \dfrac{1}{(k+1)^2}$ при $k \leq 5$ и $m_n = \dfrac{1}{4(2k-1)}$ при $k \geq 6$.

Полагайки (1) $a_1 = \cdots = a_{k+1} = \dfrac{1}{k+1} - k\varepsilon$, $a_{k+2} = \cdots = a_{2k+1} = (k+1)\varepsilon$ и (2) $a_1 = \dfrac{1}{2} - \varepsilon$, $a_{2k+1} = \varepsilon$, $a_2 = \cdots = a_{2k} = \dfrac{1}{2(2k-1)}$, при $\varepsilon \to 0+$ следва, че $m_n \geq M_n$.

Нека сега $a_1 \geq \cdots \geq a_{2k+1} > 0$ са реални числа със сума 1. Разполагаме ги по окръжност в следния ред: (3) $a_1, a_{2k}, a_3, a_{2k-2}, \ldots, a_{2k-1}, a_2, a_{2k+1}$. При $1 \leq l \leq k - 1$ имаме, че

$$1 \geq a_1 + \cdots + a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{2k+1-l} + a_{2k+1} > la_l + (2k + 1 - 2l)a_{2k+1-l}$$

$$\geq 2\sqrt{l(2k + 1 - 2l)a_l a_{2k+1-l}} \geq 2\sqrt{1(2k + 1 - 2)a_l a_{2k+1-l}},$$

откъдето

$$(4) \quad a_l a_{2k+1-l} < \frac{1}{4(2k-1)}.$$

Освен това,

$$1 > ka_k + a_{k+1} \geq (k + 1)a_{k+1}$$

и значи

$$(5) \quad a_k a_{k+1} < \frac{1 - a_{k+1}}{k} a_{k+1} \leq \frac{1 - \frac{1}{k+1}}{k} . \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Следователно $m_n \leq M_n$, с което задачата е решена.

Оценяване. (7 точки) По 1 т. за (1), (2) и (3), и по 2 т. за (4) и (5).

Задача 12.4. В една държава има $n \geq 1$ града, някои от които са свързани с двупосочни шосета. Броят на всички шосета е $2019n$ и всяко от тях има дължина, която е естествено число.

Област с център град A ще наричаме двойка (V, R) от градове и шосета в държавата, за които:

1. използвайки шосетата само от R може да се стигне от всеки град от V до всеки друг от V ;

2. общата дължина на шосетата от R е възможно най-малка, така че 1 да е в сила.

3. броят на шосета извън R, които свързват A с V е положително число кратно на 101;

Да се докаже, че има области (V_1, R_1) и (V_2, R_2) с общ център A, така че $R_1 \subsetneq R_2$ и разликата на сумарните дължини на шосетата в R_1 и R_2 се дели на 9.

Решение. Нека $G_1 = (V_1, E_1)$ е граф с върхове градовете и ребра – шосетата в държавата. Тогава знаем, че $|E_1| = 2019|V_1|$. Следователно G_1 има свързана компонента $G = (V, E)$ с $|E| \geq 2019|V|$.

За множество от шосета R с $s(R)$ ще бележим общата дължина на шосетата от R. Нека $E_0 \subseteq E$ има свойството, че от всеки град във V има път до всеки друг, използващ само шосета от E_0, като $s(E_0)$ е възможно най-малко. Тогава в графа (V, E_0) няма цикли, защото иначе може да махнем шосе e от E_0 като градовете V останат свързани с шосетата от $E_0 \setminus \{e\}$, но $s(E_0 \setminus \{e\}) < s(E_0)$. Следователно (V, E_0) е дърво.

Нека (V', E'_0) е произволно поддърво на (V, E_0), тоест $V' \subseteq V_0$, $E'_0 \subseteq E_0$ свързва точно градове от V' и между всеки два града от V' има (единствен) път, който използва само шосета от E'_0. Да допуснем, че има множество от шосета E'' с обща дължина $s(E'') < s(E'_0)$, чрез които от всеки град на V' може да стигнем до всеки друг от V'. Ще докажем, че това не е възможно.

Нека V'' са градовете, които са краища на шосе от E''. Може да предполагаме, че от всеки град от V'' може да се стигне до град от V' само по шосета от E''. Иначе може да махнем шосета от E'', като при това единствено ще намалим общата дължина на шосетата в E''. Нека (V'', E''_0) е поддървото на (V, E_0) с градове V''. Тогава е ясно, че ако заменим шосетата от E''_0 с тези от E'' отново от всеки град от V ще може да се стигне до всеки друг като сумата от дължините на всички пътища ще бъде $s(E_0 \setminus E''_0 \cup E'') = s(E_0) - s(E''_0) + s(E'')$. Сега тъй като $s(E'') < s(E'_0)$ и $s(E'_0) \leq s(E''_0)$, защото всяко шосе има неотрицателна дължина и $E_0' \subseteq E_0''$, то $s(E_0 \setminus E_0'' \cup E'') < s(E_0)$. Това противоречи с избора на множеството от шосета E_0. Това показва, че всяко поддърво (V', E_0') на (V, E_0) удовлетворява условие 1 от дефиницията за област.

Сега на върховете от V ще раздадем етикети по следния начин. Да фиксираме един град $v \in V$ и да номерираме шосетата от E_0 по произволен начин с числа $1, \ldots, |E_0|$. За всеки град $u \in V$ има единствена редица от неповтарящи се шосета, които водят от v до u. Нека $\lambda(u)$ е редицата от номерата на тези шосета. В частност $\lambda(v) = ()$ е празната редица.

Общият брой шосета в E е поне $2019|V|$, следователно $|E \setminus E_0| \geq 2019|V| - |V| + 1 = 2018|V| + 1$. Това означава, че поне един от градовете във V е край на поне $\frac{2018}{2} + 1 = 1010$ шосета, които не са от E_0. Нека A е такъв град. Нека $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ са съседните градове на A, до които може да стигнем с шосета от $E \setminus E_0$. Без ограничение на общността може да предполагаме, че $\lambda(v_1), \lambda(v_2), \ldots, \lambda(v_m)$ са подредени в лексикографски нарастващ ред.

За всяко k нека $u_k' \in V$ е градът с етикет $\lambda(u_k')$, който е най-дългият общ префикс на $\lambda(v_1), \ldots, \lambda(v_{101k})$. Полагаме V_k' да са всички градове C с етикет $\lambda(C)$, който има префикс $\lambda(u_k)$ и самият той е префикс на някой от етикетите $\lambda(v_j)$ за $j \leq 101k$. Нека $R_k' \subseteq E_0$ е множеството от шосета, всяко от които свързва точно два града от V_k'. Да забележим, че има най-много едно шосе $(A, v) \in E_0 \setminus R_k'$, за което $v \in V_k'$. Наистина, ако $(A, v) \in E_0$ то $\lambda(A)$ е префикс на $\lambda(v)$ или $\lambda(v)$ е префикс на $\lambda(A)$ като $||\lambda(A)| - |\lambda(v)|| = 1$. Ако $\lambda(A)$ е префикс на $\lambda(v)$ и $\lambda(u)$ е префикс на A, то $A \in V_k'$ и следователно $(A, v) \in R_k'$. Следователно, $\lambda(A)$ е префикс на $\lambda(u)$ и тогава други шосета $(A, v') \in E_0$ с $v' \in V_k'$ няма. Ако $\lambda(v)$ е префикс на $\lambda(A)$, то отново няма друг град $v' \in V_k'$ със свойството, че $\lambda(A)$ е префикс на $\lambda(v')$, защото иначе, $\lambda(A) \in V_k'$.

Сега дефинираме $V_k = V_k'$, $R_k = R_k'$ и $u_k = u_k'$, ако няма шосета $(A, v) \in E_0 \setminus R_k'$ с $v \in V_k'$. Иначе, нека (A, v) е единственото такова шосе. Тогава е ясно, че $A \notin V_k'$ и полагаме $V_k = V_k' \cup \{A\}$, $R_k = R_k' \cup \{(A, v)\}$ и $u_k = A$, ако $v = u_k$ и $u_k = A$, иначе.

Във всички случаи $|R_k| = |V_k| - 1$, откъдето (V_k, R_k) е поддърво на (V, E_0) и от по-горе удовлетворява условията 1 и 2 за област. Накрая шосетата (A, v), за които $v \in V_k$ са точно шосетата (A, v_1), (A, v_2), $\ldots (A, v_{101k})$. Следователно (V_k, R_k) е област с център A. Тъй като $m \geq 1010$ има поне 10 области (V_k, R_k) при $k = 1, 2, \ldots, 10$. Тогава, ако s_k е сумата от дължините на шосетата в R_k то има поне две $1 \leq i < j \leq 10$, за които $s_j \equiv s_i(\mod 9)$. Това показва, че $s_j - s_i$ се дели на 9, а по конструкция $R_i \subsetneq R_j$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за въвеждане на (V, E_0) и доказателство, че е дърво; 1 т. за доказателство, че всяко поддърво (V', E') удовлетворява условия 1 и 2 от дефиницията на област; 1 т. за наблюдението, че има град с поне 1010 съседа във V по шосета, които не са в E_0; 1 т. за въвеждане на лексикографска наредба на върховете във (V, E_0); 2 т. за конструкцията на областите R_k; 1 т. за довършване.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.3, 8.4 – Ивайло Кортезов; 8.2 – Емил Стоянов; 9.1, 9.2 – Диана Данова; 9.4, 11.2, 11.3 – Александър Иванов; 9.3 (10.3) – Петър Бойваленков; 10.1, 10.2 – Стоян Боев; 10.4 (11.4) – Александър Иванов и Емил Колев; 11.1 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.3 – Николай Николов; 12.4 – Стефан Герджиков.