МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ПРОЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР
31 март – 2 април 2017 г., Варна

Задачи, решения, оценяване

4.1. Намерете стойността на израза $C = 3.A : B + B : 3$, ако
$A = 26.25 - 25.24 + 24.23 - 23.22 + 22.21 - 21.20 + 20.19 - 19.18 + 18.17 - 17.16 + 16.15 - 15.14$,
а B е най- малкото естествено число, което прави равенството $12 : x = 7 - x$ вярно.

Решение:

A=26.25 – 25.24 + 24.23 – 23.22 + 22.21 – 21.20 + 20.19 – 19.18 + 18.17 – 17.16 + 16.15 – 15.14=

=25(26-24)+23(24-22)+21(22-20)+19.(20-18)+17(18-16)+15(16-14)= (1 т.)

=25.2+23.2+21.2+19.2+17.2+15.2=

=2.(25+23+21+19+17+15)= (1 т.)

=2.3.40=240 (1 т.)

$12 : x = 7 - x$

$12 = x.(7 - x)$ (0,5 т.)

$x = 1 -$ невъзможно (0,5 т.)

$x = 2 -$ невъзможно (0,5 т.)

$x = 3 \Rightarrow 12 = 3.(7-3) \Rightarrow B = 3$ (0,5 т.)

$C = 3.A : B + B : 3$

$C = 3.240 : 3 + 3 : 3$

$= 240 + 1 = 241$ (1 т.)

4.2. Образуваме числова редица по следния начин: на първо и второ място записваме съответно цифрите 2 и 7. След това на трето място записваме последната цифра на произведението им. На четвърто място записваме последната цифра на произведението на последните две записани цифри. Така, на всяко следващо място записваме последната цифра на произведението на последните две записани цифри в редицата. Коя е цифрата на 2017$^{\text{-то}}$ място в тази числова редица?

Решение: Записваме първите няколко числа от редицата

2 7 4 8 2 6 2 2 4 8 2 6 2 2 4 8 2 6 2 2 … **(2 т.)**

Забелязваме, че след първите две места се получава група от шест цифри 4 8 2 6 2 2, която се повтаря. **(2 т.)**

$2017 - 2 = 2015, \quad 2015 : 6 = 335\,(ост.\,5)$ **(1 т.)** $\Rightarrow$ 4 8 2 6 **2** 2

Последната цифра в така получената редица е 2. **(1 т.)**

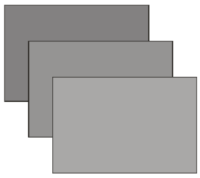
4.3. Ива разполага с голям брой еднакви картончета с форма на правоъгълник с размери: дължина 12 см и ширина 8 см. Тя направила две отделни подреждания:

а) Първо подреждане (Фиг.1): Слага на масата едно картонче. Второто слага върху първото, като го отмества с 3 см надолу и 2 см надясно. Третото картонче слага върху второто, като го отмества също с 3 см надолу и 2 см надясно. Намерете лицето на фигурата, която е получила Ива от така наредените три картончета.

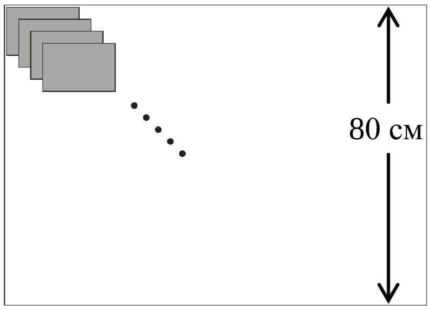
б) Второ подреждане (Фиг.2): Слага едно картонче в горния ляв ъгъл на масата. Второто слага върху първото, като го отмества с 1 см надолу и 1 см надясно. Третото слага върху второто, като го отмества също с 1 см надолу и 1 см надясно. Ива продължава по този начин да слага картончета, докато стигне до ръб на масата.

Ако масата е правоъгълна, дълга 110 см и широка 80 см, колко картончета трябва да сложи Ива, докато стигне ръб на масата?

Намерете лицето на незапълнената част от масата.

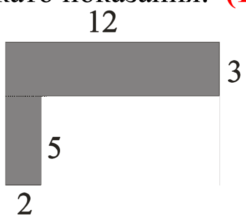


Фиг.1



Фиг.2

Решение: а) Можем да разрежем получената фигура на правоъгълник с размери 12 см и 8 см, както и два елемента като показания. **(1 т.)**



Лицето на показаната фигура е 5.2 + 12.3 = 46 кв. см. Лицето на правоъгълника е 8.12 = 96 кв.см. **(0,5 т.)**

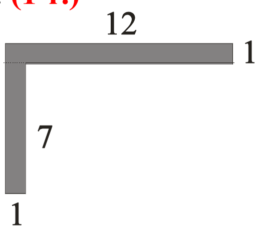
Лицето на получената фигурата е S = 2.46 + 96 = 188 кв. см. **(0,5 т.)**

Забележка. Точки се присъждат и за всяко друго правилно разрязване.

б) За второто подреждане: Масата има размери 110 см по дължина и 80 см по ширина. За да се достигне десния ръб на масата ще са необходими 1 + (110-12) : 1 = 99 картончета. (Понеже след първото картонче, всяко следващо добавя само 1 сантиметър към дължината на фигурата.) **(1 т.)**

За да се достигне долния ръб на масата, ще са необходими 1 + (80-8) : 1 = 73 картончета. Така Ива ще достигне най-напред долния ръб на масата. **(1 т.)**

Фигурата, оформена от картончетата, се състои от един правоъгълник с размери 12 см и 8 см и 72 елемента като показания. **(1 т.)**



$S_{\text{пок.елемент}} = 12.1 + 7.1 = 19$ кв. см. **(0,5 т.)**

$S_{\text{фигура}} = 72.19 + 8.12 = 1464$ кв. см. **(0,5 т.)**

$S_{\text{маса}} = 80.110 = 8800$ кв. см. **(0,5 т.)**

$S_{\text{незапълнена част}} = 8800 - 1464 = 7336$ кв. см. **(0,5 т.)**

4.4. Двама четвъртокласници играят на игра с 10 купчинки от по 10 камъчета. Когато е на ход, всеки играч има право да направи по избор един от следните четири хода:

1.) да вземе всичките камъчета от една от наличните купчинки;

2.) да вземе всичките камъчета от две от наличните купчинки;

3.) да вземе по едно камъче от всички налични купчинки;

4.) да вземе по две камъчета от всички налични купчинки.

Печели този, който вземе последното камъче. Кой от играчите – първият или вторият, може със сигурност да спечели играта, ако играе правилно? Опишете как да стане това.

Решение: От условието е ясно, че след всеки ход във всички оставащи купчинки има един и същ брой камъчета. **(1 т.)** След всеки ход ситуацията на играта може да бъде описана с числата m и n, където m е броят на купчинките, а n е броят на камъчетата във всяка от купчинките. Ще записваме ситуацията след всеки ход с (m; n). В началото ситуацията се описва с (10; 10). След първия ход са възможни следните ситуации (9; 10), (8; 10), (10; 9) или (10; 8). **(1 т.)** Във всяка от тези позиции вторият играч може да направи ход, с който да изравни броят на купчинките и камъчетата в тях, т. е. да доведе ситуацията до (m; m). **(2 т.)** Първият играч отново трябва наруши равенството на двете числа, а вторият може да го възстанови. **(1 т.)** Така, докато се стигне до ситуация, в която или броят на купчинките, или броят на камъчетата ще стане по-малък от 3. В тази ситуация вторият играч може да вземе всички камъчета. **(1 т.).**

За коректно написване на конкретен пример на разиграване – **(1 т.)**.

Печелившата стратегия е на втория играч, който винаги трябва да изравнява камъчетата и купчинките.

Забележка. Възможно е задачата да се реши и чрез последователно изчерпване на възможности. *(точките се разпределят по подходящ начин)*.

Задачите са предложени, както следва:

4.1. и 4.2. – Катя Чалъкова; 4.3. – Надежда Буюклиева; 4.4. – Теодоси Витанов

5.1. Майката на Любо му дала 10 лева и го изпратила до близката пекарна да купи най-малко 60 курабийки. Обещала му рестото да остане за него. В пекарната една курабийка струва 30 стотинки, пакет от 7 курабийки струва 1 лев, а пакет от 12 курабийки струва 1,80 лева. Каква покупка трябва да направи Любо така, че да остане най-голямо ресто?

Решение: Ще разгледаме два случая.

1) <u>Любо е купил точно 60 курабийки</u>.

Най-малката стойност на покупката ще се получи, когато броят на единичните курабийки е минимален. В долната таблица сме подредили възможните покупки на точно 60 курабийки спрямо броя пакети от 12.

Брой пакети от 12	Брой пакети от 7	Брой единични	Общ брой курабии	Платена сума	Ресто
0	8	4	60	9,20	0,80
1	6	6	60	9,60	0,40
2	5	1	60	8,90	1.10
3	3	3	60	9,30	0,70
4	1	5	60	9,70	0,30
5	0	0	60	9,00	1,00

2) <u>Любо е купил повече от 60 курабийки</u>.

Брой пакети от 12	Брой пакети от 7	Брой единични	Общ брой курабии	Платена сума	Ресто
0	9	0	63	9,00	1,00
1	7	0	61	8,80	1,20
4	2	0	62	9,20	0,80

Следователно възможно най-голямото ресто е 1,20.

Оценяване: 3 т. за точно 60, 2 т. за повече от 60 и 1 т. за верен отговор.

5.2. В редица са написани само нули и единици – общо 5020 цифри. Извършва се следната операция: 25% от първоначалния брой нули се превръщат в единици и 25% от първоначалния брой единици се превръщат в нули. Оказва се, че след тази операция 65% от всички цифри са нули. Колко процента от цифрите първоначално са били нули?

Решение: 25% от нулите стават $1 \Rightarrow 75\% = \frac{3}{4}$ от нулите остават нули (0,5т.)

$$25\% \text{ от единиците стават } 0 \Rightarrow 25\% = \frac{1}{4} \text{ от единиците стават нули (0,5т.)}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \text{ от нулите} + \frac{1}{4} \text{ от единиците} = 65\% \text{ от всички цифри (1т.)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right) \text{от нулите} + \frac{1}{4} \text{ от единиците} = \frac{1}{2} \text{ от нулите} + \frac{1}{4} \text{ от} \left(\text{нулите+единиците}\right) \text{ (1т.)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \text{ от нулите} + \frac{1}{4} \text{ от } 5020 = 3263 \text{ (1т.)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \text{ от нулите} = 3263 - 1255 = 2008 \text{ (0,5т.)}$$

$$\Rightarrow \text{ нулите първоначално са били } 4016 \text{ (0,5т.)}$$

$$\Rightarrow \text{ те са } \frac{4016}{5020} = \frac{4}{5} = 80\% \text{ от всички цифри първоначално. (1т.)}$$

5.3. След натискане на бутон числото на екрана на калкулатора се увеличава с дробната си част. Например от $\frac{3}{7}$ след натискане на бутона на екрана се появява $\frac{6}{7}$ $\left(\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{6}{7}\right)$, а от 3,6 след натискане на бутона на екрана се появява 4,2 $(3,6+0,6=4,2)$. Започвайки с положително число, по-малко от 1, след десет последователни натискания на бутона на екрана се появява числото 10. Намерете първоначалното число.

Решение: Всеки път към числото се прибавя дробната му част, откъдето следва, че цялата част на числото може да се увеличи най-много с 1.(0,5 т.). От друга страна след 10 натискания на бутона се получава 10 от число, по-малко от 1. Заключаваме, че всеки път цялата част се увеличава точно с 1.(1 т.)

По-нататък разсъжденията са отзад напред:

10 се получава от $9\frac{1}{2}$ (0,5 т.); $9\frac{1}{2}$ се получава от $8\frac{3}{4}$, защото $1\frac{1}{2}:2=\frac{3}{4} \Rightarrow 9\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=8\frac{3}{4}$ (3 т.) (част от тези 3 точки могат да се получат в следните случаи: за изказано твърдение,

че $9\frac{1}{2}$ може да се получи от $9\frac{1}{4}$ или от $8\frac{3}{4}$(1 т.); за изказано твърдение, че при $9\frac{1}{4}$ няма увеличение с 1 на цялата част (1 т.))

Аналогично предходните числа са $7\frac{7}{8}; 6\frac{15}{16}; 5\frac{31}{32}; 4\frac{63}{64}; 3\frac{127}{128}; 2\frac{255}{256}; 1\frac{511}{512}; \frac{1023}{1024}$(1т.).

Първоначалното число е: $\frac{1023}{1024}$(1 т.)

5.4. Дадени са 5 различни естествени числа със следното свойство: сборът на всеки 4 от тях се дели на 5. Докажете, че утроеният сбор на всеки 3 от тези числа се дели на 15.

Решение: Нека числата са a, b, c, d, f и $a<b<c<d<f$. От условието следва, че

$\left.\begin{array}{l} 5/a+b+c+f \\ 5/a+b+c+d \end{array}\right\} \Rightarrow 5$ дели и разликата на тези сборове. Така получаваме, че $5/a+b+c+f-a-b-c-d \Rightarrow 5/f-d \Rightarrow d$ и f дават един и същ остатък при деление с 5. (2 т.).

Аналогично получаваме, че

$\left.\begin{array}{l} 5/a+b+d+f \\ 5/a+b+c+f \end{array}\right\} \Rightarrow c$ и d дават един и същ остатък при деление с 5.

$\left.\begin{array}{l} 5/a+c+d+f \\ 5/a+b+d+f \end{array}\right\} \Rightarrow b$ и c дават един и същ остатък при деление с 5.

$\left.\begin{array}{l} 5/b+c+d+f \\ 5/a+c+d+f \end{array}\right\} \Rightarrow a$ и b дават един и същ остатък при деление с 5. (1 т.).

$\Rightarrow a,b,c,d,f$ дават един и същи остатък при деление с 5. (1 т.).

Ако този остатък при деление с 5 е: 1, 2, 3 или 4, то сумата от четири числа ще дава съответно остатък 4, 3, 2 или 1, т.е. нито една от сумите по четворки не се дели на 5.

$\Rightarrow$Всяко от тези 5 числа се дели на 5. (2 т.).

$\Rightarrow$Сумата на всеки три числа се дели на 5. $\Rightarrow$Утроената сума на всеки три числа от дадените се дели на 15. (1 т.).

Задачите са предложени, както следва:
5.1. – Иван Ангелов; 5.2. и 5.3. – Гергана Николова; 5.4. – Петя Тодорова

6.1. Блатът на първия етаж на двуетажна торта е правоъгълен паралелепипед с дължина 36 cm и широчина 24 cm, а блатът на втория етаж е цилиндър с диаметър 24 cm, височина 7 cm и обем, който е три пъти по-малък от обема на първия етаж. Цилиндърът е поставен с основата си върху паралелепипеда.

а) Намерете височината на блата на първия етаж на тортата.

б) Намерете колко литра крем са необходими, за да се покрият видимите части на блатовете на тортата с равномерен слой с дебелина 5 mm.

При пресмятанията използвайте, че $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Решение: а) Радиусът на блата на втория етаж на тортата е $R = 12$ cm, височината е $h = 7$ cm, а обемът е $V = \pi R^2 h = \frac{22}{7}.12^2.7 = 3168$ cm^3. Ако означим височината на блата на първия етаж с x, то обемът му е $36.24.x = 864x$ cm^3. Получаваме равенството $864x = 3.3168$, откъдето $x = 11$cm.

б) За да намерим обема на нужния крем за покриване на видимите части на блатовете, можем да считаме, че покриваме с крем околните стени и горната основа на правоъгълния паралелепипед, както и околната повърхнина на цилиндъра. Обемът на необходимия крем за покриване на околната повърхнина на цилиндъра получаваме като от обема на цилиндър с радиус 12,5 cm и височина 7 cm извадим обема на цилиндричния блат. Получаваме $\frac{22}{7}.12,5^2.7 - 3168 = 269,5$cm^3. Обемът на необходимия крем за покриване на околните стени и горната основа на правоъгълния паралелепипед получаваме като разлика от обемите на два правоъгълни паралелепипеда: „външен“ с размери 37 cm, 25 cm и 11,5 cm и „вътрешен“ с обема на блата на първия етаж. Получаваме $37.25.11,5 - 9504 = 1133,5$cm^3. Следователно обемът на нужния крем е 1403cm$^3 = 1,403$ литра.

Оценяване: а) **1 точка** за пресмятане на обема на втория етаж и **1 точка** за намиране височината на първия етаж.

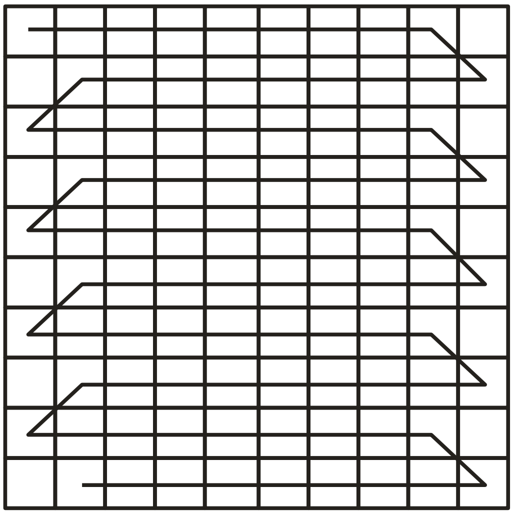
б) **3 точки** за изразяване на обема на крема като разлики или сборове от обеми и **1 точка** за получаване на отговора $1,403$ литра.

6.2. Намерете цифрите *a*, *b*, *c*, *d* и *e*, ако $A = \overline{abcd}$ е най-голямото четирицифрено число, което се дели на 132 и 136, а числото $B = \overline{abcd} + \overline{abde}$ се дели на 12. Сравнете по големина числата $X = -\frac{1,44:0,9 + \left(-2,1:(-0,07)\right).(-0,17) + \left|-0,00264:0,0024\right|}{\left|-0,34-0,23\right|:(-2,5+0,6) - \left|(-0,3)^3:0,01\right| - 0,6}$ и $Y = \frac{-10d - c}{100}$.

Решение: Намираме, че НОК на 132 и 136 е 4488, а оттам и числото 8976, което е най-голямото четирицифрено число, кратно на 132 и 136. Следователно $a = 8$, $b = 9$, $c = 7$ и $d = 6$. (1 т.) Тогава за сбора получаваме $B = 8976 + \overline{896e}$. Очевидно е, че за да се дели B на 12, е нужно $\overline{896e}$ да се дели на 4 и на 3. Затова сборът $8 + 9 + 6 + e$ трябва да се дели на 3. Оттук намираме стойностите $e = 1$, $e = 4$ и $e = 7$. (1 т.) Освен това, числото $\overline{6e}$ трябва да се дели на 4, откъдето $e = 0$, $e = 4$ и $e = 8$. Окончателно, $e = 4$. (1 т.) Пресмятаме $X = -\frac{2}{3}$ (2 т.), $Y = -\frac{67}{100}$ и намираме, че $X > Y$.(1 т.)

Оценяване: **1 точка** за намиране на *a*, *b*, *c* и *d* , **2 точки** за намиране на *e*, **2 точки** за пресмятане на $X = -\frac{2}{3}$, **1 точка** за пресмятане на $Y = -\frac{67}{100}$ и сравняване.

6.3. Квадрат със страна 10 cm е разделен с хоризонтални и вертикални линии на 100 квадратчета със страна 1 cm. В едно от квадратчетата е поставено камъче. Камъчето се мести по следното правило: осем последователни хода хоризонтално или вертикално и деветият ход е по диагонал, отново осем последователни хода хоризонтално или отвесно и деветият ход е по диагонал и т.н. Не се разрешава камъчето да се слага два пъти на едно и също квадратче. Колко най-много хода могат да се направят?



Решение: Нека оцветим квадратчетата шахматно и да предположим, че първоначално камъчето е на черно квадратче. При всеки от първите 8 хода ще се сменя цветът на квадратчето, на което се намира камъчето, а след деветия ход ще остане на същия цвят, на какъвто е след осмия. Така след първия ход камъчето е на бяло квадратче, след втория – на черно и т.н. Последователността е БЧБЧБЧБЧЧ и за всеки 9 хода камъчето ще бъде поставяно на 5 черни и 4 бели квадратчета. Ако повторим последователността 9 пъти, камъчето ще е било на 9.5 + 1 = 46 черни квадратчета и ще са направени 81 хода. Всички черни квадратчета на дъската са 50, следователно остават още 4, които могат да бъдат обходени с още 8 хода. Следователно броят на ходовете не може да надхвърля 89. На фиг. 1 е показан пример, при който наистина могат да се направят 89 хода и камъчето да бъде поставено на 90 квадратчета, включително началното.

Оценяване: **1 точка** за шахматно оцветяване на квадратчетата, **1 точка** за проследяване на закономерността след 9 хода, **4 точки** за пълно доказателство, че броят на ходовете не може да надхвърля 89, **1 точка** за пример за реализиране на 89 хода.

6.4. Числото 2017 е записано като сбор на пет естествени числа. По колко различни начина може да бъде направено това, ако за десетичния запис на петте числа са използвани различни цифри?

Решение. Сборът на всички цифри е 45, той се дели на 9. Ако в записа на числата използваме всичките 10 цифри, то сборът на петте числа трябва да се дели на 9. Числото 2017 се дели на 9 с остатък 1, следователно и сборът на използваните цифри трябва да се дели на 9 с остатък 1. Откриваме, че в записа на петте събираеми не трябва да участва цифрата 8. Очевидно с пет едноцифрени и двуцифрени числа не може да се получи сбор 2017. С девет различни цифри могат да се запишат две трицифрени и три едноцифрени числа, като най-големият сбор ще е 1720. Ще разгледаме случая, когато едното число е четирицифрено. Ако цифрата на хилядните е 2, най-малкото четирицифрено число с различни цифри е 2013 и като го съберем със сбора на останалите четири числа $4+5+6+7=22$, ще получим сбор, по-голям от 2017. Следователно цифрата на хилядите на четирицифреното число трябва да е 1. Не е възможно цифрата на стотиците на това число да е 7 или по-малка от 7, защото тогава сборът на останалите четири числа и на двуцифреното число, образувано от последните две цифри на четирицифреното число, е най-много 110. Значи най-големият сбор на петте числа в този случай е 1810. Следва, че цифрата на стотиците на четирицифреното число е 9. Освен четирицифреното число имаме още едно двуцифрено и три едноцифрени. Интересуваме се от възможностите за първата цифра на двуцифреното число и за цифрата на десетиците на четирицифреното число. Ако означим с X и $У$ съответно сбора от цифрите на десетиците и единиците на петте числа, то $X+У=27$. Тъй като трябва да е изпълнено $10.X+У=117$, то $X=10$, $У=17$. Следователно за двете цифри, от които се интересуваме, има две възможности: 3 и 7 или 4 и 6.

Случай 1. Двете цифри са 3 и 7, откъдето получаваме две възможности (първата цифра на двуцифреното число е 3, а цифрата на десетиците на четирицифреното число е 7 или обратното). За цифрата 0 също има две възможности (да бъде цифра на единиците на четирицифреното число или на двуцифреното). Цифрата на единиците на числото без нулата може да бъде една от останалите четири цифри – четири възможности. Пример: $1930 + 72 + 4 + 5 + 6 = 2017$. В този случай получаваме $2.2.4 = 16$ различни сбора, т.е. 16 решения на задачата.

Случай 2. Аналогично получаваме още 16 решения, когато цифрите на десетиците в двете числа са 4 и 6. Пример: $1940 + 62 + 3 + 5 + 7 = 2017$.

Окончателно броят на всички представяния на 2017 като сбор на пет събираеми е 32.

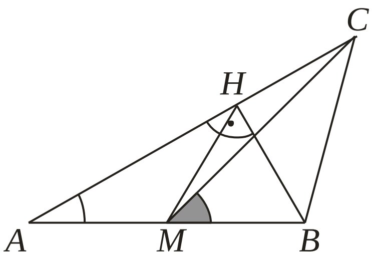
Оценяване: **1 точка** за извод, че в записа няма 8, **1 точка** за отхвърляне на сбор от едноцифрени и двуцифрени и сбор от трицифрени и едноцифрени числа, **2 точки** за сбор с едно четирицифрено и извод за цифра на единиците и десетиците, **2 точки** за *Случай* 1, **1 точка** за *Случай* 2 и отговор.

Задачите са предложени, както следва:
6.1., 6.2. и 6.3. – Мариана Кьосева; 6.4. – Велислав Йончев

7.1. Намерете всички цели стойности на параметрите a, b и c така, че многочлените $A=(x-a)(x-2017)+1$ и $B=(x-b)(x-c)$ да са тъждествено равни.

Решение: Ще използваме факта, че два многочлена са тъждествено равни, ако за всяка стойност на промелнивата x съответните им стойности са равни. Нека $x=2017$ **(1 т.)**. Тогава $A=1$, а $B=(2017-b)(2017-c)$ и $(2017-b)(2017-c)=1$, **(1 т.)** откъдето $b=c=2016$ или $b=c=2018$. Ако $b=c=2016$, имаме $(x-a)(x-2017)+1=(x-2016)^2$ или $(a-2015)x=2017a+1-2016^2$. Последното равенство е тъждество за $a=2015$ Следователно първото решение е $a=2015$, $b=c=2016$. **(2 т.)**
По същия начин във втория случай получаваме $a=2019$ и второто решение е $a=2019$ $b=c=2018$. **(2 т.)**
Задачата може да се реши и ако разгледаме многочлените при $x=a$

7.2. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle CAB=30°$. Точката M е средата на AB и $\sphericalangle BMC=45°$. Намерете останалите ъгли на триъгълника.



Решение: Нека BH е височината към страната AC. Тогава $\sphericalangle ABH=60°$. **(1 т.)** Понеже HM е медиана в правоъгълен триъгълник, триъгълниците AMH и BMH са равнобедрени. Следователно $\triangle BMH$ е равностранен. **(1 т.)** Тъй като $\sphericalangle BMC<\sphericalangle BMH$, то точката H е вътрешна за страната AC. **(1 т.)** От $AM=MH$ намираме $\sphericalangle MHA=\sphericalangle MAH=30°$. **(1 т.)** Понеже $\sphericalangle MHC$ е външен за $\triangle AMH$ и $\sphericalangle MHC=2\sphericalangle CAB=60^0$, то $\sphericalangle MHC=120^0$. Освен това $\sphericalangle CMH=15°$, откъдето $\sphericalangle HCM=15°$. **(1 т.)** Следователно $HM=HC$. От друга страна $HM=HB$ и получаваме $HC=HB$. Така намираме $\sphericalangle ACB=\sphericalangle HCB=45°$ и $\sphericalangle ABC=105°$. **(1 т.)**

7.3. Възможно ли е естествените числа от 1 до 200 да се наредят по окръжност, така че за всяка двойка съседни числа поне едното да се различава от другото с цяло число проценти?

Решение: Ако m и n са естествени числа и m се различава от n с $k\%$, то $m=n\pm\frac{kn}{100}$, откъдето $\frac{100m}{n}=100\pm k$. **(1 т.)**. Следователно числото $\frac{100m}{n}$ трябва да е цяло. **(1 т.)** Да допуснем, че числата от 1 до 200 могат да се подредят по указания начин и да разгледаме простото число *p*, $101 \le p < 200$. **(1 т.)** Нека съседното му число е *a*. От двете числа $\frac{100p}{a}$ и $\frac{100a}{p}$ цяло число може да бъде само първото и то само когато *a* дели 100. **(1 т.)** Делителите на 100 са 9 (1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 и 100) **(1 т.)**, а 9 прости числа имат 10 съседни позиции. **(1 т.)** Понеже простите числа в разглеждания интервал са повече от 9, такова подреждане не е възможно. **(1 т.)** (Изисква се написването на поне 10 прости числа. Простите числа от 101 до 200 са 21: 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 181, 191, 193, 197, 199.)

7.4. Дадено е естествено число. Разрешени са две операции: прибавяне към числото на негова цифра и изваждане от полученото число на негова цифра (цифрата може да е и 0). Първо се извършва прибавяне, след това изваждане и т.н., операциите се редуват. Може ли с помощта на тези операции да се получи 2017 и кое е най-малкото естествено число, с което може да се започне?

Решение: Да разгледаме прехода от трицифрено към четирицифрено число. Трябва да прибавяме цифра и затова най-малкото естествено число, от което можем да получим четирицифрено, е 991. Ако това не е първото прибавяне, преди него е имало изваждане от число от вида $\overline{99a}$. Ако от $\overline{99a}$ извадим негова цифра, получаваме число, по-малко или равно на 990. Следователно най-малкото число, с което може да се започне, е 991. **(3 т.)**

Започваме с 991 и прилагаме операциите. След като получим 1000, прибавяме последната цифра и вадим 1. Така получаваме редицата:

991, **1000,** 999, 1008, 1007, 1014, 1013, 1016, 1015, **1020,** 1019 …

Вижда се, че последната цифра се изменя циклично: 0, 9, 8, 7, 4, 3, 6, 5, 0, … , като за един цикъл числото се увеличава с 20. Следователно с 50 цикъла от числото 1000 ще получим 2000. След това можем да продължим така: от 2000 с изваждане на 2 и прибавяне на 9 получаваме 2007, а след това с прибавяне на пет пъти 2 и изваждане на 0, получаваме 2017. **(4 т.)**

Задачите са предложени, както следва:

7.1. – Стоян Ненков; 7.2, 7.3., 7.4. – Теодоси Витанов

8.1. Дадени са естествените числа *a, b* и *c* . Ако числата $\frac{a\sqrt{13}+b}{b\sqrt{13}+1}$ и $\frac{c\sqrt{7}+a}{b\sqrt{7}+c}$ са рационални, докажете, че числото $\frac{a^3+c^6}{a(b^2-b+1)}$ е цяло.

Решение: Нека $\frac{a\sqrt{13}+b}{b\sqrt{13}+1} = n \Rightarrow \left(a-b.n\right)\sqrt{13} = n-b$, но $n-b$ е рационално число и следователно са изпълнени равенствата: $n-b = a-b.n = 0$ и $n = b, a = n.b = b^2$. Аналогично получаваме, че

$\frac{c\sqrt{7}+a}{b\sqrt{7}+c} = m \Rightarrow (c-m.b)\sqrt{7} = c.m-a$ и $c = m.b, a = m.c \Rightarrow a.b = b.m.c = c^2$ или

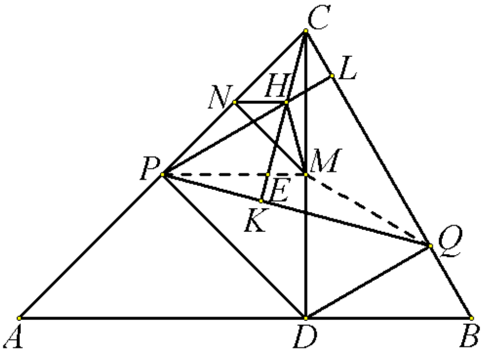
$c^2 = b^3$. Заместваме в числото

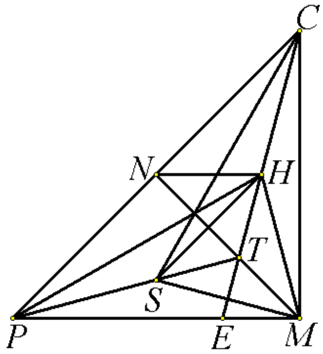
$$\frac{a^3+c^6}{a(b^2-b+1)} = \frac{b^6+b^9}{b^2\left(b^2-b+1\right)} = \frac{b^6\left(b+1\right)\left(b^2-b+1\right)}{b^2\left(b^2-b+1\right)} = b^5+b\text{, което е цяло число.}$$

Оценяване: **2 точки** за $a=b^2$, **2 точки** за $c^2=b^3$, **2 точки** за доказване, че числото е цяло.

8.2. Даден е ΔABC, за който $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 75^\circ$. Нека $CD \perp AB$ $(D \in AB)$, $DP \perp AC$ $(P \in AC)$ и $DQ \perp BC$ $(Q \in BC)$. Ако H е ортоцентърът на ΔPQC, а M и N са средите съответно на CD и CP, да се намерят ъглите на ΔMNH.

Решение: От условието следва, че $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Освен това $\sphericalangle MPC = \sphericalangle MCP = 45^\circ$ и $\sphericalangle BCM = 30^\circ$. Тъй като PM и QM са медиани съответно в правоъгълните триъгълници CDP и CDQ, то точките P, D, Q и C лежат на окръжност с център M, откъдето $\sphericalangle QPC = \sphericalangle CDQ = \frac{QC}{2} = 60^\circ$. Ако $CH \cap PQ = K$, то $\sphericalangle PCH = \sphericalangle DCQ = 30^\circ$. Оттук следва, че $\sphericalangle MCH = 15^\circ$. Ако $PH \cap BC = L$, от правоъгълния триъгълник CLP следва, че $\sphericalangle CPH = \sphericalangle CPL = 15^\circ$.





По-нататък ще определим мярката на $\sphericalangle CMH$. За целта нека $CH \cap MN = T$, а ъглополовящата на $\sphericalangle PCH = 30^\circ$ пресича PT в точка S. MN е симетрала на PC и следователно $PT = CT$, $\sphericalangle MPT = \sphericalangle MCT = 15^\circ$ и $\sphericalangle PTC = \sphericalangle PTM = \sphericalangle CTM = 120^\circ$. В равнобедрения $\triangle CPT$ ъглополовящите PH и CS са равни.Това означава, че $CH = PS$ и $TH = TS$. От първи признак следва, че $\Delta MHT \cong \Delta MST$. Следователно $\Delta CTS \cong \Delta PTM$ по втори признак и оттук $CS = PM = CM$. Заключаваме, че $\sphericalangle SCH = \sphericalangle MCH$ и $\Delta CSH \cong \Delta CMH$ по първи признак. Затова $SH = MH = MS$ и ΔMHS е равностранен. Това означава, че $\sphericalangle SMH = 60^\circ$. Освен това $\Delta MCH \cong \Delta MPS$ по трети признак и оттук $\sphericalangle CMH = \sphericalangle PMS$. Следователно $2\sphericalangle CMH + 60^\circ = 90^\circ$, т.е. $\sphericalangle CMH = 15^\circ$.Тъй като $\sphericalangle CMN = 45^\circ$, от последното равенство следва, че $\sphericalangle NMH = \sphericalangle CMN - \sphericalangle CMH = 30^\circ$.

Нека сега $CH \cap PM = E$. Тъй като $\sphericalangle HME = \sphericalangle HEM = 75^\circ$, то $MH = HE$. От друга страна ΔMCH е също равнобедрен и е изпълнено $MH = CH$. Следователно MH е медиана в правоъгълния триъгълник CEH и H е среда на CE. Тъй като N е среда на CP, то NH е средна отсечка в ΔPEC. Затова $NH \parallel PE$, т.е. $NH \parallel PM$. Следователно $\sphericalangle CNH = 45^\circ$. Оттук намираме

$$\sphericalangle HNM = \sphericalangle CNM - \sphericalangle CNH = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

За третия ъгъл на ΔMNH получаваме $\sphericalangle MHN = 180^\circ - \sphericalangle NMH - \sphericalangle HNM = 105^\circ$. Така окончателно ъглите на ΔMNH са 30°, 45° и 105°.

Оценяване: **1 точка** за $\sphericalangle CPH = \sphericalangle CPL = 15°$, **2 точки** за ΔMHS равностранен, **1 точка** за $\measuredangle NMH = 30^{\circ}$, **2 точки** за другите два ъгъла.

8.3. В квадратна мрежа без начало и край е даден правоъгълник 21×3, съставен от единични квадратчета на мрежата, които се оцветяват в 5 цвята (незадължително всички). Съществува ли оцветяване така, че всеки два правоъгълни блока 3×1, съставени от единични квадратчета на мрежата, средното от които е в дадения правоъгълник, са различно оцветени. (Два блока са различно оцветени, ако единият не може да се получи от другия чрез преместване или завъртане.) Не се допуска оцветяване, при което повече от един блок 3×1 е съставен само от неоцветени квадратчета.

Решение: От условието следва, че трябва да разглеждаме и блоковете 3×1, които излизат извън дадения правоъгълник 21×3 с по най-много едно единично квадратче, т.е. заедно с дадения правоъгълник трябва да разглеждаме и единичната ивица около него. Тъй като при оцветяването се допускат и неоцветени квадратчета от дадения правоъгълник, можем да считаме, че неоцветените единични квадратчета се оцветяват в шести цвят (например червен), различен от петте. Да разгледаме средното квадратче на даден блок. То може да бъде оцветено по 6 начина. Да фиксираме един от тях. Ако другите две квадратчета на дадения блок са едноцветни, получаваме общо 6 различни блока. В случай, че другите две квадратчета са в различен цвят, получаваме още $\frac{6.5}{2}=15$ различни блока и общият брой различни блокове става 21. Тогава броят на различните оцветявания, при които всеки два блока са различни, е $21.6=126$. От друга страна, възможните блокове 3×1 в дадения правоъгълник 21×3 заедно с ивицата са $21.3+21.3=21.6=126$. Двете бройки съвпадат. В частност следва, че при оцветяването на правоъгълника 21×3 със сигурност трябва да има и неоцветени квадратчета.

Да допуснем, че съществува оцветяване с исканите свойства. От направените разглеждания следва, че оцветяването на блоковете 3×1 в него е единствено. Нека червените квадратчета в правоъгълника 21×3 са x. Тогава броят на блоковете,чието средно квадратче е някое от тези x червени, е $2x$ (един хоризонтален и един вертикален блок). От разглежданията по-горе следва, че $2x=21$, което е невъзможно.

Оценяване: **1 точка** за ясно декларирана идея да се разглежда разширеният правоъгълник; **2 точки** за намиране броя на различните оцветявания на блок 3×1; **1 точка** за намиране броя на възможните блокове 3×1; **2 точки** за заключението, че оцветяването на блоковете е единствено; **1 точка** за достигане на противоречие.

8.4. Дадено е уравнението $a^3+b^3+1=kab$ относно естествените числа a, b и k.

а) Решете уравнението при $k=11$.

б) Да се докаже, че ако уравнението има решение при $k>3$, то числото k^3-27 има делител d, за който $d\in[k+9;5k)$.

Решение: а) Ще докажем, че уравнението няма решение. Допускаме противното. От условието и неравенството между средното аритметично и средното геометрично имаме $11ab=a^3+b^3+1>a^3+b^3\geq 2ab\sqrt{ab} \Rightarrow 11>2\sqrt{ab} \Rightarrow 121>4ab \Rightarrow ab\leq 30$.

1) Нека $a=b$. Тогава $2a^3+1=11a^2$ и a дели 1, т.е. $a=1$, което е невъзможно.

2) Нека за определеност $a>b$. Тогава съгласно неравенството $ab\leq 30$ имаме $1\leq b\leq 5$. Сега разглеждаме последователно отделните случаи:

2.1) $b=1 \Rightarrow a^3+2=11a \Rightarrow a\leq 30$ и a дели 2, т.е. $a=1$ или $a=2$, което се отхвърля с непосредствена проверка;

2.2) $b=2 \Rightarrow a^3+9=22a \Rightarrow 3\le a\le 15$ и a дели 9, т.е. $a=3$ или $a=9$, което се отхвърля с непосредствена проверка;

2.3) $b=3 \Rightarrow a^3+28=33a \Rightarrow 4\le a\le 10$ и a дели 28; т.е. $a=4$ или $a=7$, което се отхвърля с непосредствена проверка;

2.4) $b=4 \Rightarrow a^3+65=44a \Rightarrow 5\le a\le 7$ и a дели 65, т.е. $a=5$, което се отхвърля с непосредствена проверка;

2.5) $b=5 \Rightarrow a=6$ и $6^3+5^3+1=11.5.6$, което не е вярно.

б) Означаваме $A=a+b$, $B=ab$. Ако $A=2$, то $k=3$, което противоречи на $k>3$. Следователно $A\ge 3$. От условието следват последователно равенствата:

$$A^3-3AB+1=kB \Rightarrow B=\frac{A^3+1}{3A+k}=\frac{1}{27}\frac{27A^3+k^3-(k^3-27)}{3A+k} \Rightarrow$$

$$27B=9A^2-3Ak+k^2-\frac{k^3-27}{3A+k}.$$

Означаваме $d=k+3A$. Ще докажем, че d има желаните свойства. При $a=2$, $b=1$ се получава $k=5$ и $d=14$, което показва, че $A=3$ е възможно. Следователно $d\ge k+9$. Остава да докажем, че $d<5k$. Тъй като $k^2>\frac{k^3-27}{k+3A}$, от полученото по-рано равенство $27B=9A^2-3Ak+k^2-\frac{k^3-27}{3A+k}$ имаме $27B>9A^2-3Ak$. Освен това от $ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$ следва $B\le\frac{A^2}{4}$. Заключаваме, че $\frac{27A^2}{4}>9A^2-3Ak$, откъдето $3A<4k$ и $d=k+3A<5k$.

Оценяване: **3 точки** за а) от които **1 точка** за оценка и **2 точки** за проверките; **4 точки** за б).

Забележка. **7 точки** ако е доказано б) и е доказано, че а) следва от б): Съгласно б) $11^3-27=8.163$ и трябва да има делител d, за който е изпълнено $d\in[20;55)$, което е невъзможно. (Числото 163 е просто.)

Задачите са предложени, както следва:
8.1. – Ирина Шаркова; 8.2. и 8.4. – Веселин Ненков и Тодор Митев; 8.3. – Сава Гроздев